74KV

e3a concours

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 3 PC

durée 4 heures

Problème

Les trois parties du problème ne sont pas indépendantes.

La fonction f étudiée tout au long du problème est introduite dans la partie **II.**

On rappelle que $\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})$ *et que* $\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})$ *pour tout réel* t.

Partie I

1°. Soit k un entier $\geqslant 1$. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-kt}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On note $J_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-kt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

2°. Donner la valeur de J_k $\left(\text{on pourra utiliser l'égalité } \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

3°. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}\operatorname{ch} t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Tournez la page S.V.P.

On note $K = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}\,t}$.

4°. **(a)** Montrer que $K = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}(1+\mathrm{e}^{-2t})}\,\mathrm{d}t$.

(b) En déduire que $K = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}}$.

5°. Montrer que $\dfrac{1}{2} < K < 1$.

Partie II

Soit n un entier $\geqslant 1$. Pour tout réel x dans $]0,\pi[$, on pose :

$$u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}, \qquad f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \qquad \text{et} \qquad A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx).$$

6°. **(a)** Pour tout x dans $]0,\pi[$, montrer que $A_n(x) = \dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

(b) Si $n \geqslant 2$, montrer que $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} A_k(x)\Big(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\Big) + \varepsilon_n(x)$, où $\big(\varepsilon_n(x)\big)_{n\geqslant 2}$ est une suite tendant vers 0.

7°. En déduire la convergence de la série de terme général $u_n(x)$.

On note $f(x)$ la somme de la série de terme général $u_n(x)$.

8°. **(a)** Montrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $f_{2n}\Big(\dfrac{\pi}{4n}\Big) - f_n\Big(\dfrac{\pi}{4n}\Big) \geqslant C\sqrt{n}$. Expliciter une telle constante.

(b) La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle uniformément sur $]0,\pi[$?

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$. Si $z = a + \mathrm{i}\,b$ est un nombre complexe avec a et b réels, on désigne par $\mathrm{Im}\,(z)$ sa partie imaginaire, c'est-à-dire b.

9°. **(a)** Soit $x \in]0,\pi[$. Déterminer le tableau de variations de la fonction $t \mapsto |\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-t} - 1|$ définie pour $t \in [0,+\infty[$.

(b) Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}\,(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-t})}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

(c) Établir alors que $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{Im}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-t} - \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-t}\right)^{n+1}}{\sqrt{t}\,(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x-t})}\,\mathrm{d}t$.

(d) En déduire que $f(x) = \dfrac{\sin x}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\,(\mathrm{ch}\,t - \cos x)}$.

(e) Montrer que $f(x) > 0$.

(f) En comparant les valeurs de ch t et e^t sur $]0,+\infty[$, montrer que $\dfrac{1}{2} < f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 1$.

Partie III

Dans cette partie, $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

10°. (a) Établir que la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}\,(\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 x)}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

(b) Montrer que $f(2x) = \dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}\,(\mathrm{sh}^2 u + \sin^2 x)}$.

11°. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $]0,\pi[$.

12°. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi[$.